Optimale Bestellmenge und optimale Losgröße als Hilfsmittel rationaler Betriebsführung

Author(s): L. Pack

Source: *Management International*, 1965, Vol. 5, No. 1 (1965), pp. 63-81
Published by: Springer
Stable URL: http://www.jstor.com/stable/40225778

Optimale Bestellmenge und optimale Losgröße als Hilfsmittel rationaler Betriebsführung

Prof. Dr. L. Pack, Universität Münster

In der Literatur beschäftigt man sich in jüngerer Zeit immer häufiger mit der Ermittlung optimaler Bestellmengen und Losgrößen und mit der damit verbundenen Problematik [1]. Das hat seinen Grund nicht zuletzt darin, daß eine Unternehmensführung, wenn sie rationell sein will, alle Möglichkeiten der Kostensenkung ausnutzen muß. Dazu zwingt u. a. die mit zunehmender Integration innerhalb der EWG wachsende internationale Konkurrenz auf den Absatzmärkten. Denn je niedriger die Produktionskosten eines Betriebes für ein Produkt sind, desto eher kann die Geschäftsleitung Preissenkungen der Konkurrenten folgen oder diese selber zur Erhöhung des Marktanteils vornehmen, bzw. desto höher sind bei gleichbleibender Preissituation die erzielbaren Gewinne und damit verbunden die Überlebenschancen im Kampf um die Märkte.

Ein Weg zu solchen Kostensenkungen kann in einem Arbeiten mit optimalen Bestellmengen und optimalen Losgrößen gesehen werden. Aus diesen Gründen scheint uns die Klärung einiger grundsätzlicher betriebswirtschaftlicher Fragen erforderlich, die sich in den Funktionsbereichen der Lagerung, des Einkaufs, der Produktion und des Verkaufs bei der Ermittlung optimaler Bestellmengen und optimaler Losgrößen ergeben. Diesen Problemen sind die folgenden Ausführungen gewidmet [2].

Aus Gründen der Vereinfachung wird in der folgenden Darstellung die Bestimmung opti-

[1] A. Angermann, Entscheidungsmodelle, Frankfurt/M., 1963, S. 97—116; C. W. Churchman, R. L. Ackoff, E. L. Arnoff, Operations Research, Eine Einführung in die Unternehmensforschung, Wien und München 1961, dtsch. Übers. von "Introduction to Operations Research", 4. Aufl. New York 1959, S. 38 ff.; B. P. Dzielinski, C. T. Baker, A. S. Manne, Simulation Tests of Lot Size Pogramming, Management Science 1963, S. 229—258; F. Hanssmann. Operations Research in Production and Inventory Control, New York, London, 1962, S. 13 ff.; K. Mellerowicz, Betriebswirtschaftslehre der Industrie, 1. Band, 3. durchgesehene und erweiterte Auflage, Freiburg i. Brsg. 1958, S. 244 ff. und S. 381 ff.; derselbe, Die optimale Auftragsgröße als Problem der Kostenpolitik, BFuP 1962, S. 678 ff.; H. Müller-Merbach, Sensibilitätsanalyse der Losgrößenbestimmung, Unternehmensforschung 1962, S. 79 ff.; H. Ohse, Wirtschaftliche Probleme industrieller Sortenfertigung, 1. und 2. Band, Köln und Opladen 1963; L. Orth, Die Eignung der Losgrößenformel als Instrument der Produktionsplanung, ZfhF 1961, S. 738 ff.; B. Peters, Die Bestimmung der optimalen Losgröße, Eine Anwendung der Nichtlinearen Programmierung, Diss. Göttingen 1961; M. E. Salveson, A Problem in Optimal Machine Loading, Management Science, Vol. 2, 1956, S. 232—260; H. Schlüter, Zum Problem der optimalen Losgröße, Zfh 1954, S. 188—203; derselbe, Untersuchungen zum Problem der optimalen Losgröße, Diss. Frankfurt 1958; W. Strobel, Simultane Losgrößenbestimmung bei stationären Modellen, ZfB 1964, S. 241 ff.; A. Vazsonyi, Economic Lot Size Formulas in Manufacturing, Operations Research 1957, S. 28—44.

[2] Für eine detaillierte Darstellung der hier stark gekürzten Ausführungen vgl. die Schrift des Verfassers: „Optimale Bestellmenge und optimale Losgröße — zu einigen Problemen ihrer Ermittlung", Wiesbaden 1964.

maler Bestellmengen in den Vordergrund gestellt. Die Ermittlung optimaler Losgrößen wird jedoch formal meist in der gleichen Weise vorgenommen. Die in der Literatur z. T. schon beschriebenen Interdependenzprobleme[3], die dann auftreten, wenn für *mehrere Produktarten simultan* optimale Losgrößen zu bestimmen sind, haben für die Ermittlung optimaler Bestellmengen keine oder doch nur eine wesentlich geringere Bedeutung. Sie bleiben deshalb im folgenden außerhalb der Betrachtung, und die Ausführungen gelten, sofern nichts anderes gesagt wird, für optimale Bestellmenge und optimale Losgröße in gleicher Weise.

I. Der Begriff der optimalen Bestellmenge

Als Bestellmenge bezeichnet man die Anzahl von Produkten, die auf einmal eingekauft wird. Bei einer Variation der Bestellmenge entwickeln sich zwei Kostenartengruppen in entgegengesetzter Richtung: Mit steigender Bestellmenge sinken die auf das Stück bezogenen bestellfixen Kosten, da diese unabhängig von der Größe der Bestellung in konstanter Höhe anfallen. Aus dieser Sicht erscheinen deshalb möglichst hohe Bestellmengen vorteilhaft. Die Zins- und Lagerkosten pro bestellte Einheit steigen dagegen mit wachsender Einkaufsmenge und legen kleine Bestellmengen nahe. Das Minimum der Kosten pro Stück ergibt sich in dieser Konfliktsituation dann, wenn bei einer Erhöhung (Verminderung) der Bestellmenge die Zunahme (Abnahme) der Zins- und Lagerkosten pro Stück gerade durch die Abnahme (Zunahme) der bestellfixen Kosten pro Stück kompensiert wird. Die Bestellmenge, für welche diese Bedingung erfüllt ist, wird als „optimal" bezeichnet.

II. Die Bestimmung der optimalen Bestellmenge aus dem in der Literatur üblicherweise verwandten Modell

Auf die algebraische Bestimmung der optimalen Bestellmenge soll hier nur kurz eingegangen werden, da sie in der Literatur vielfach beschrieben wird[4]. Sie führt zu der bekannten Wurzelformel

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot U \cdot K_{fp}}{k_{vp} \cdot (i+j)}}. \tag{1}$$

Dabei bedeuten:

x	[ME/Bestellung]	= Bestellmenge (ME = Mengeneinheiten, z. B. Stücke, kg, l, m, m^2 usw.);
k_{vp}	[DM/ME]	= Preis pro bestellte Einheit; k_{vp} wird wie üblich konstant angenommen, was konstanten Einkaufspreisen entspricht;
K_{fp}	[DM/Bestellung]	= bestellfixe Kosten einer Bestellung (ohne Lagerkosten);
i	[pro Jahr]	= Zinssatz für die Verzinsung des durchschnittlich im Lager gebundenen Kapitals;
j	[pro Jahr]	= Zuschlagssatz für die Verrechnung des von einer Bestellung zu tragenden Anteils an den Lagerkosten eines Jahres;
U	[ME/Jahr]	= die pro Jahr absetzbare Menge des betrachteten Gutes.

[3] Vgl. u. a. A. Vazsonyi, a.a.O., S. 28 ff.; M. E. Salveson, a.a.O., S. 247—249; L. Orth, a.a.O., S. 743; W. Strobel, a.a.O., S. 241—245; C. W. Churchman, R. L. Ackoff, E. L. Arnoff, a.a.O., S. 240.

[4] Vgl. u. a. E. Gutenberg, Art. Sortenprobleme und Losgröße, Handwörterbuch der Betriebswirtschaft, dritte, völlig neu bearbeitete Auflage, Band III, Stuttgart 1960, Sp. 4897 ff., hier Sp. 4902 f.; H. Schlüter, Zum Problem ..., a.a.O., S. 190—194.

Es sei nur noch darauf hingewiesen, daß man an Stelle der optimalen Bestellmenge auch die optimale Lagerzeit t [Jahre/Bestellung] oder die optimale Bestellhäufigkeit m [Bestellungen/Jahr] berechnen kann. Zwischen x, m und t bestehen dabei folgende Zusammenhänge:

$$m = \frac{U}{x} = \sqrt{\frac{2 K_{fp}}{U \cdot k_{vp} \cdot (i + j)}}$$

$$t = \frac{x}{U} = \sqrt{\frac{U \cdot k_{vp} \cdot (i + j)}{2 K_{fp}}} \quad [5]$$

Geometrisch kann man die optimale Bestellmenge bestimmen, indem man die Kurve der bestellfixen Kosten pro Stück $(\frac{K_{fp}}{x})$ und die Kurve der Zins- und Lagerkosten pro Stück $\left(\frac{k_{vp}(i + j)}{2U} \cdot x\right)$ in ein Koordinatensystem überträgt und den ihrem Schnittpunkt entsprechenden Abszissenwert aufsucht[6]. Bei der dem Schnittpunkt entsprechenden Produktmenge sind die Steigungen der beiden Kurven negativ gleich; dort liegt also das Minimum der Stückkostenkurve.

III. Die Bestimmung der optimalen Bestellmenge bei Gewährung von Mengenrabatten und die Ermittlung der optimalen Losgröße bei Verfahrenswechsel

Unter Verwendung des in Abb. 1 dargestellten Verfahrens kann eine einfache Methode für den Fall beschrieben werden, daß die proportionalen Kosten pro Stück (also bei Bestellmengen der Einkaufspreis pro Einheit, bei Losgrößen die variablen Produktionskosten pro Stück) sich sprunghaft ändern. Ein solcher Sachverhalt tritt z. B. dann auf, wenn beim Einkauf gestaffelte Mengenrabatte gewährt werden, bzw. wenn bei zunehmender Losgröße Maschinen mit höherem Rationalisierungsgrad zum Einsatz kommen, die in der Regel höhere losfixe und niedrigere variable Kosten verursachen. Da bei Gewährung von Men-

[5] Ein einfaches Zahlenbeispiel mag die Interdependenzen verdeutlichen:
Wenn

$$K_{fp} = 40 \text{ [DM/Bestellung]},$$
$$U = 200 \text{ [ME/Jahr]},$$
$$k_{vp} = 16 \text{ [DM/ME]},$$
$$100\,(i + j) = 10 \text{ [\% pro Jahr]},$$

dann erhält man:

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot 40}{0{,}1 \cdot 16}} = 100 \text{ [ME/Bestellung]}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 40}{16 \cdot 0{,}1 \cdot 200}} = \tfrac{1}{2} \text{ [Jahre/Bestellung]}$$

$$m = \sqrt{\frac{16 \cdot 0{,}1 \cdot 200}{2 \cdot 40}} = 2 \text{ [Bestellungen/Jahr]}$$

[6] Daß sich auf diese Weise die optimale Bestellmenge ergibt, folgt unmittelbar aus Gleichung (1). Quadriert man (1) und multipliziert das Ergebnis mit $\frac{k_{vp}(i + j)}{2 U x}$, so ergibt sich die oben verwandte Optimierungsbedingung

$$\frac{K_{fp}}{x} = \frac{k_{vp} \cdot (i + j)}{2 U} \cdot x$$

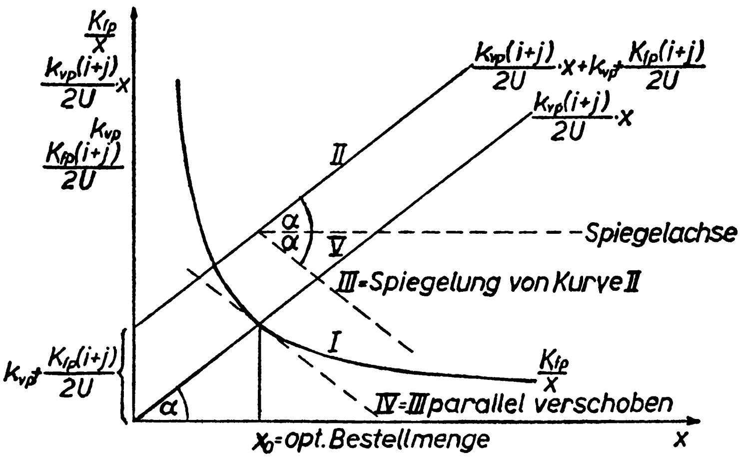

Abb. 1: Die geometrische Bestimmung der optimalen Bestellmenge bzw. der optimalen Losgröße

genrabatten nur die variablen Kosten pro Stück, beim Verfahrenswechsel jedoch auch die losfixen Kosten Sprungstellen aufweisen, ist für Bestellmengen und Losgrößen ein unterschiedliches Vorgehen erforderlich.

Zur Ermittlung der optimalen Bestellmenge trägt man zunächst die Kurve der bestellfixen Kosten pro Stück $\frac{K_{fp}}{x}$ in ein Koordinatensystem ein (vgl. Abb. 2). Sodann unterteilt man den ersten Quadranten entsprechend der Staffelung der Mengenrabatte so in verschiedene Bereiche, daß für jeden Bereich ein einheitlicher Mengenrabatt und infolgedessen ein gleicher Einkaufspreis gilt. In das Koordinatensystem sind nun die Kurven der Zins- und Lagerkosten pro Stück einzutragen. Da die Zins- und Lagerkosten pro Stück von den Einkaufspreisen beeinflußt werden[7], gibt es so viele Zins- und Lagerkostenkurven, wie es durch die Mengenrabatte differierende Einkaufspreise gibt.

Wie in Abb. 1 können wir nun die den einzelnen Einkaufspreisen zugehörigen „optimalen Bestellmengen" ermitteln, indem wir die einzelnen Geraden mit der Kurve der bestellfixen Kosten pro Stück zum Schnitt bringen. Relevant sind dabei jedoch nur die Schnittpunkte, welche in den Bereich fallen, in dem der zur schneidenden Geraden gehörige Preis gilt[8]. Um nun die niedrigsten überhaupt möglichen Kosten pro bestellte Einheit zu finden, geht man von der Bestellmenge aus, die von allen die vorgenannte Bedingung erfüllenden die größte ist. Denn bei ihr müssen die Stückkosten auf jeden Fall niedriger sein als bei kleineren „optimalen Bestellmengen". Das ist in Abb. 2 die Menge x_2. Dann untersucht man, ob nicht für höhere Bestellmengen noch geringere Stückkosten auftreten. Dazu braucht man nur die Kosten pro Einheit an den unteren Grenzen der nachfolgenden Rabattbereiche zu untersuchen, da die jeweiligen Stückkostenkurven rechts davon not-

[7] Wie aus Abb. 1 ersichtlich, bestimmt k_{vp} bei gegebenem i, j und U die Steigung der genannten Kurven.

[8] Wenn mehrere Einkaufspreise gelten, gibt es so viele „optimale Bestellmengen" wie es Einkaufspreise gibt. Diese „optimalen Bestellmengen" können sowohl innerhalb des Mengenbereiches liegen, in dem der ihrer Ermittlung zugrunde liegende Preis gilt, als auch außerhalb. Diesem Umstand muß bei der Bestimmung des „minimum minimorum" Rechnung getragen werden.

wendigerweise ansteigen. Denn alle rechts von x_2 liegenden Rabattzonen beginnen rechts vom Minimum der für sie geltenden Kurven der Kosten pro bestellte Einheit.

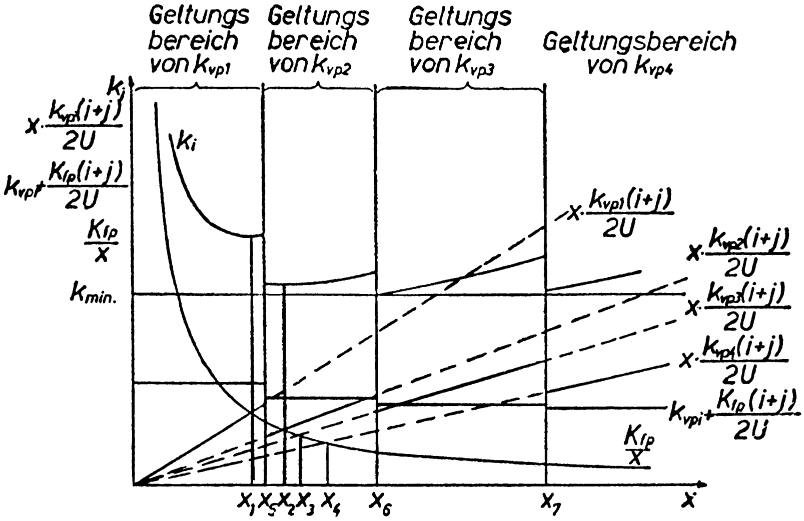

Abb. 2: Geometrische Bestimmung der optimalen Bestellmenge, wenn die Einkaufspreise — z. B. durch die Gewährung von Rabatten — mengenmäßig gestaffelt sind.

In Abb. 2 sieht man, daß die Stückkosten bei der Menge x_6 niedriger sind als bei der größten relevanten „optimalen Bestellmenge", obwohl das — nicht relevante — Minimum der zum Preis k_{vp3} gehörenden Stückkostenkurve schon überschritten wurde. Da man aber, um k_{vp3} erzielen zu können, mindestens x_6 abnehmen muß, stellt diese Menge das tatsächlich erreichbare „minimum minimorum" dar.

Will man die optimale Bestellmenge algebraisch errechnen, so kann analog vorgegangen werden: Man bestimmt die „optimalen Bestellmengen" für die einzelnen Preise so lange, bis man die größte gefunden hat, die noch in den Bereich fällt, in dem der für sie unterstellte Preis gilt. Für die folgenden Preiszonen errechnet man die Stückkosten an den

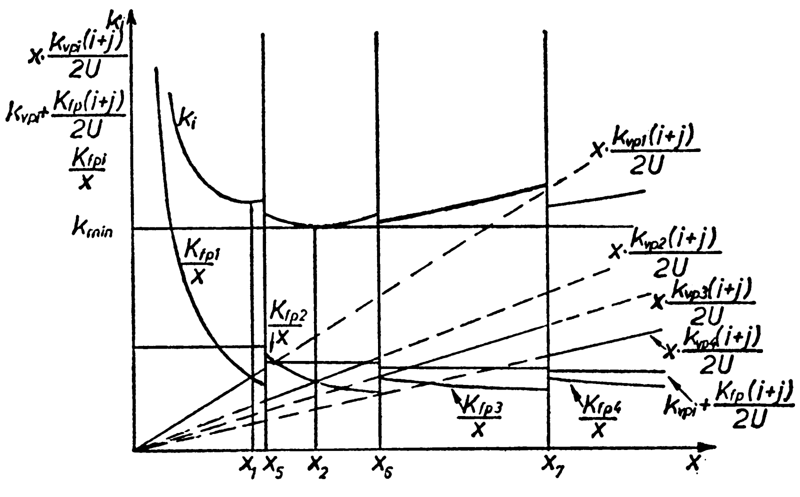

Abb. 3: Die geometrische Bestimmung der optimalen Losgröße, wenn mit steigender Losgröße rationellere Fertigungsverfahren angewandt werden können.

Bereichsuntergrenzen, vergleicht sie mit denjenigen bei der größten relevanten „optimalen Bestellmenge" und findet so die Bestellmenge mit den niedrigsten überhaupt erreichbaren Stückkosten [9].

Das Vorgehen, das bei der Ermittlung der optimalen Losgröße im Falle des Überganges zu rationelleren Fertigungsverfahren anzuwenden ist, unterscheidet sich prinzipiell nicht von dem oben beschriebenen (vgl. Abb. 3). Zusätzlich muß jedoch berücksichtigt werden, daß in diesem Falle auch die Kurve der auflagefixen Kosten pro Stück Sprungstellen aufweist.

IV. Die Lagerkosten, ihr Einfluß auf die optimale Bestellmenge und die optimale Losgröße

1. Analyse der Lagerkosten

In der Literatur wird die Lagerkostenverrechnung üblicherweise in Form eines Zuschlages auf den Zinssatz verrechnet. Man unterstellt also, daß die Lagerkostenfunktion die Form hat

$$(2) \quad K_l(x) = \frac{K_p(x)}{2} \cdot j \cdot t = \frac{K_{fp} + k_{vp} \cdot x}{2U} \cdot x \cdot j,$$

wobei $K_l(x)$ die Lagerkosten pro Bestellung und $K_p(x)$ die Einstandskosten einer Bestellung (ohne Zins- und Lagerkosten) bedeuten. Das heißt, die Lagerkosten werden als Zuschlag auf die halben Einstandskosten (bzw. Herstellkosten) verrechnet. Der Zuschlagssatz j wird ex ante mit einem konstanten numerischen Wert in die Berechnung eingeführt und als von der Bestellmenge unabhängig angesehen [10]. Das ist aber nur dann zulässig, wenn bei Variation der Bestellmenge die Lagerkosten sich proportional zu den Einstandskosten der bestellten Menge verändern.

Durch Analyse der Lagerkosten soll geprüft werden, ob diese Proportionalität besteht. Man kann vier Bestandteile der Lagerkosten unterscheiden.

1) Bestellfixe Lagerkosten, die von der Bestellmenge und der Lagerzeit unabhängig sind K_{fl}. Sie bilden das Pendant zu den bestellfixen Kosten des Einkaufsbereichs. Gewisse Kosten, die beim Lagerzugang entstehen, evtl. auch gewisse Transportkosten, gehören hierzu.

2) Lagerkosten, die von der Bestellmenge abhängig, aber von der Lagerzeit unabhängig sind, z. B. gewisse Kosten der Ein- und Auslagerung. Wir bezeichnen sie mit K_{vl1}. Unterstellt man Proportionalität zur Bestellmenge, so gilt für sie

$$(3) \quad K_{vl1} = k_{vl1} \cdot x,$$

wobei k_{vl1} die zur Bestellmenge proportionalen Lagerkosten pro Stück bedeutet.

---

[9] Wird z. B. für Abnahmemengen, die größer als 100 Stück sind, ein Mengenrabatt von 10 % gegeben, dann beträgt die optimale Bestellmenge unter den Bedingungen des weiter oben angegebenen Zahlenbeispiels nicht mehr 100, sondern 105 Stück (genau 105,42).

[10] Vgl. u. a. H. J. Zimmermann, Mathematische Entscheidungsforschung und ihre Anwendung auf die Produktionspolitik, Berlin, 1963, S. 121; K. Mellerowicz, a.a.O., S. 381, besonders Fußnote 138; W. Lücke, Die optimale Auflegungszahl, ZfB 1956, S. 653; H. Schlüter, Zum Problem . ., a.a.O., S. 191 und 193.

3) Lagerkosten, die von der Bestellmenge unabhängig, jedoch von der Lagerzeit abhängig sind, z. B. die Kosten für spezielle Lagerräume einer Material- oder Produktart. Unterstellt man auch hier Proportionalität, so gilt

$$(4) \quad K_{vl2} = k_{vl2} \cdot t = k_{vl2} \cdot \frac{x}{U},$$

wobei k_{vl2} die zur Lagerzeit proportionalen Lagerkosten pro Jahr bedeutet.

4) Lagerkosten, die sowohl von der gelagerten Menge als auch von der Lagerzeit abhängig sind; z. B. Kosten, die mit Erhaltung und Pflege der Lagergüter anfallen (Reinigung, Verhinderung von Korrosion usw.). Auch Schwund, Verderb und Beschädigung gehören in diese Kategorie. Wenn für eine Einheit einer Materialart in einem Jahr k_{vl3} DM Kosten dieser Art anfallen, dann ergibt das unter Berücksichtigung eines durchschnittlichen Lagerbestandes von $\frac{x}{2}$ für eine Bestellung

$$(5) \quad K_{vl3} = k_{vl3} \cdot \frac{x}{2} \cdot t = \frac{k_{vl3}}{2U} \cdot x^2.$$

Die Abhängigkeit der gesamten Lagerkosten von der Bestellmenge wird somit durch folgende Funktion beschrieben:

$$(6) \quad K_l(x) = K_{fl} + k_{vl1} \cdot x + k_{vl2} \cdot \frac{x}{U} + \frac{k_{vl3}}{2U} \cdot x^2.$$

Proportionalität zwischen den Lagerkosten und dem Einstandswert einer Bestellung besteht also nicht. Der konstante Lagerkostensatz j darf daher im Rahmen einer exakten Berechnung von optimalen Losgrößen und optimalen Bestellmengen nicht verwandt werden. Vielmehr müssen die Lagerkosten entsprechend ihrer funktionalen Abhängigkeit von der Bestellmenge bzw. Losgröße in die Rechnung eingeführt werden.

2. *Die Verzinsung der Lagerkosten*

Bevor wir nun den Ansatz für eine im Hinblick auf die Lagerkostenverrechnung korrekte Bestellmengenformel darlegen können, muß noch untersucht werden, inwieweit die Lagerkosten zinswirksam werden und infolgedessen die Stückkosten und deren Minimum beeinflussen.

1) Die fixen Lagerkosten einer Bestellmenge (K_{fl}) fallen in der Regel beim Lagerzugang an. Sie werden mit den kontinuierlich anfallenden Erlösen freigesetzt und sind folglich während der Lagerzeit im Durchschnitt in ihrer halben Höhe als Kapital gebunden und zu verzinsen.

2) Bei den ausschließlich von der Bestellmenge abhängigen Lagerkosten handelt es sich, wie bereits gesagt, primär um Kosten der Ein- und Auslagerung. Auslagerungskosten fallen erst bei Veräußerung an, führen also zu keiner Kapitalbindung, sofern die Erlöse mindestens die Kosten decken und keine Kreditverkäufe stattfinden, was unterstellt werden soll.

Für die Einlagerungskosten, deren Anteil an dieser Lagerkostenkategorie gleich $b \cdot k_{vl1} \cdot x$ ist, gelten die unter 1) gemachten Ausführungen analog.

3) Den zur Lagerzeit proportionalen Lagerkosten stehen in jedem Zeitpunkt gleichhohe Erlöse gegenüber, so daß eine Verzinsung entfallen kann.

4) Bei Lagerkosten, die sowohl von der Lagermenge als auch von der Lagerzeit abhängig sind, ist ebenfalls eine Trennung in zwei Gruppen erforderlich:

Soweit sie durch Schwund, Verderb, Beschädigung usw. verursacht werden, handelt es sich in dem hier relevanten Sinne weniger um einen Kostenanfall als vielmehr um einen Erlösausfall. Man kann deshalb unter dem Aspekt der Verzinsung diese Kosten so behandeln, als ob sie gleichmäßig über die Lagerzeit verteilt wären. Dann kann wegen der ebenfalls kontinuierlich anfallenden Erlöse eine Verzinsung unterbleiben.

Anders verhält es sich mit den Kosten für Erhaltung und Pflege der lagernden Güter. Am Anfang der Lagerzeit, wenn der Lagerbestand hoch ist, fällt relativ viel Erhaltungs- und Pflegearbeit an. Mit fortschreitender Lagerzeit sinkt der Lagerbestand; folglich nehmen auch die zu seiner Pflege und Erhaltung erforderlichen Arbeiten und die dafür aufzuwendenden Kosten ab. Die Erlöse fallen dagegen im Zeitverlauf in gleichbleibender Höhe an. Daraus resultiert eine gewisse Kapitalbindung; ihr Ausmaß ist jedoch meist so gering, daß sie die optimale Bestellmenge praktisch nicht beeinflußt[11].

Nach Berücksichtigung der für die Lagerkosten und ihre Verzinsung geltenden Zusammenhänge können wir nun die optimale Bestellmenge ermitteln. Die gesamten Kosten einer Bestellung K(x) ergeben sich aus

$$(7)\quad K(x) = K_p(x) + K_l(x) + Z(x)$$

wobei K_p (x) die Einstandskosten, K_l (x) die Lagerkosten und Z (x) die Zinskosten einer Bestellung bezeichnen. Drückt man die Summanden durch die sie definierenden Größen aus, dann erhält man

$$\begin{aligned}(8)\quad K(x) = {} & K_{fp} + k_{vp} \cdot x \\ & + K_{fl} + k_{vl1} \cdot x + k_{vl2} \cdot \frac{x}{U} + k_{vl3} \cdot \frac{x^2}{2U} \\ & + (K_{fp} + k_{vp} \cdot x + K_{fl} + b \cdot k_{vl1} \cdot x) \cdot \frac{i \cdot x}{2 \cdot U}\end{aligned}$$

Wenn man (8) durch die Zahl der bestellten Einheiten dividiert, anschließend nach x differenziert und die Ableitung gleich Null setzt, ergibt sich als Ausdruck für die optimale Bestellmenge

$$(9)\quad x = \sqrt{\frac{2 \cdot U \cdot (K_{fp} + K_{fl})}{i\,(k_{vp} + b \cdot k_{vl1}) + k_{vl3}}}$$ [12]

3. Der Einfluß von Ausfall auf die optimale Bestellmenge

Ein Teil der mit K_{vl3} bezeichneten Lagerkosten hat nun noch einen weiteren Einfluß auf die kostenminimale Bestellmenge. Daß Schwund, Bruch, Beschädigung, Verderb usw., hier kurz als Ausfall bezeichnet, Kosten verursachen, wurde zwar in (9) berücksichtigt. Das Auftreten von Ausfall verringert jedoch auch die ab- bzw. einsetzbare Gütermenge. Bei der Behandlung dieses Sachverhaltes sei davon ausgegangen, daß der Ausfall zur Lagerzeit und zur Lagermenge proportional und pro Stück und Jahr gleich w ist.

[11] Für den Beweis dieses Zusammenhanges vgl. L. Pack, Optimale Bestellmenge und optimale Losgröße, a.a.O., S. 24—26.

[12] Dazu soll ein Zahlenbeispiel gegeben werden. Es seien:
$K_{fp} = 40$; $U = 200$; $k_{vp} = 16$; $i = 0{,}05$; $K_{fl} = 8{,}924$;
$b \cdot k_{vl1} = 0{,}32$; $k_{vl3} = 1{,}6$; dann ist

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot (40 + 8{,}924)}{0{,}05 \cdot (16 + 0{,}32) + 1{,}6}} = \sqrt{8100} = 90$$

Die Kosten, die durch ein ausgefallenes Stück verursacht werden, sind gleich dessen Einkaufspreis. Eine Verteilung der Ausfallkosten auf die ab- bzw. eingesetzten Stücke einer Bestellung ergibt infolgedessen pro Stück und Jahr Kosten in Höhe von

$$w \left[\frac{\text{Stück}}{\text{Stück} \cdot \text{Jahr}}\right] \cdot k_{vp} \text{ /DM/Stück/} = w \cdot k_{vp} \left[\frac{\text{DM}}{\text{Jahr} \cdot \text{Stück}}\right]$$

Diese Kosten sind bereits in der oben eingeführten Größe k_{v13} enthalten. Infolgedessen beträgt der Teil von k_{v13}, der durch die tatsächlich zum Verkauf bzw. Einsatz gelangenden Stücke verursacht wird, nur $k_{v13} - w \cdot k_{vp}$; denn die tatsächlich verwendeten Stücke verursachen keine Ausfallkosten.

Schließlich ist zu beachten, daß wegen des Ausfalls mehr Stücke beschafft werden müssen, als letztlich verbraucht bzw. veräußert werden können. Für die bei gegebenem w zu beschaffende Menge (y) gilt:

$$(10) \quad y = x + w \cdot \frac{y}{2} \cdot t = x + \frac{w \cdot y \cdot x}{2\,U} = \frac{x}{1 - \frac{wx}{2U}}$$

Die Lagerdauer beträgt dabei nicht $\frac{y}{U}$, sondern $\frac{x}{U}$, da sie nur von den nicht ausgefallenen Stücken bestimmt wird.

Die Berücksichtigung der aufgezeigten Zusammenhänge führt für die Gesamtkosten einer Bestellung zu folgendem Ausdruck /vgl. (8)/:

$$\begin{aligned}(11) \quad K(x) &= K_p(x) + K_l(x) + Z(x) \\ &= K_{fp} + \frac{k_{vp} \cdot x}{1 - \frac{wx}{2U}} \\ &+ K_{fl} + \frac{k_{vl1} \cdot x}{1 - \frac{wx}{2U}} + \frac{k_{vl2} \cdot x}{U} + \frac{(k_{vl3} - w \cdot k_{vp})\, x^2}{(1 - \frac{wx}{2U}) \cdot 2U} \\ &+ (K_{fp} + \frac{k_{vp} \cdot x}{1 - \frac{wx}{2U}} + K_{fl} + \frac{b \cdot k_{vl1} \cdot x}{1 - \frac{wx}{2U}}) \cdot \frac{i \cdot x}{2 \cdot U}.\end{aligned}$$

Da $b \cdot k_{vl1}$ und k_{vl3} wie k_{vp} konstante Größen sind, kann zur Vereinfachung geschrieben werden

$$(12) \quad b \cdot k_{vl1} = s \cdot k_{vp}$$

$$(13) \quad k_{vl3} = r \cdot k_{vp}$$

Zur Bestimmung des Optimums substituiert man (12) und (13) in (11), ermittelt die Stückkosten, indem man (11) durch x dividiert, und differenziert die Stückkostenfunktion nach x. Setzt man die Ableitung gleich Null, so ergibt sich nach einigen Umformungen das Optimierungskriterium:

$$(14) \quad x = \frac{1}{\sqrt{\frac{k_{vp}\,[\frac{sw}{b} + r + i\,(1 + s)]}{2 \cdot U \cdot (K_{fp} + K_{fl})}} + \frac{w}{2U}}$$

Die einschließlich des erwarteten Ausfalls zu bestellende Stückzahl ergibt sich, wenn man den aus (14) für x ermittelten Wert in (10) einsetzt[13].

V. Die Ermittlung von optimalen Bestellmengen bzw. Losgrößen, wenn die Einkaufs- bzw. Faktorpreise im Zeitverlauf variieren

1. Kontinuierliche Preisänderungen

Bisher wurde Konstanz aller Preise im Zeitverlauf unterstellt. Es gilt nun zu untersuchen, welche Änderung die optimale Bestellmenge erfährt, wenn der Einstandspreis des zu beschaffenden Gutes im Zeitablauf eine kontinuierliche Steigerung erfährt (die Ausführungen gelten für Preissenkungen analog). Es wird der Fall untersucht, daß ein im Zeitpunkt der Bestellung geltender Preis k_{vp} nach t Zeiteinheiten auf k_{vp} $(1 + a \cdot t)$ angewachsen sein wird; a ist dabei die Änderungsrate des Preises in einer Zeiteinheit (z. B. in einem Jahr).

Für die Errechnung der optimalen Bestellmenge ist es in diesem Falle einfacher, wenn man zunächst die Lagerzeit der zu beschaffenden Produkte optimiert. Da $x = t \cdot U$ ist, kann bei gegebenem t das zugehörige x leicht bestimmt werden. Bezeichnen wir die Kosten eines Loses mit K(t), so erreichen diese ihr Optimum, wenn $\frac{K(t)}{t}$ minimal wird. Nach der für die Minimierung einer Durchschnittsgröße generell geltenden Regel ist das der Fall, wenn

$$(15) \quad K'(t) = \frac{K(t)}{t},$$

wenn also die Grenzkosten in bezug auf die Zeit gleich den Kosten pro Zeiteinheit werden. Kriterium (15) besagt, daß es sich so lange lohnt, eine Bestellung um eine Einheit zu vergrößern, bis die Erhöhung der gesamten Kosten einer Bestellung (Grenzkosten) gleich

---

[13] Vom Zahlenbeispiel zu (9) ausgehend, erhält man: $s = \frac{0,32}{16} = 0,02$. Weiter sei festgelegt, daß $k_{vl1} = 0,64$; daraus folgt $b = 0,5$. Für k_{vl3}, das im Zahlenbeispiel zu (9) mit 1,6 angenommen wurde, sei unterstellt, daß es sich zur Hälfte aus Kosten zusammensetzt, die durch Ausfall verursacht werden und zur Hälfte aus sonstigen Kosten; das ergibt dann, weil die Ausfallkosten in k_{vl3} enthalten sind, für das Zahlenbeispiel zu (9): $r = \frac{0,8 + 0,8}{16} = 0,1$ und $w = \frac{0,8}{16} = 0,05$.
Auf der Basis dieser Zahlen erhält man für (14):

$$x = \frac{1}{\sqrt{\frac{16\left[\frac{0,02 \cdot 0,05}{0,5} + 0,1 + 0,05\ (1 + 0,02)\right]}{2 \cdot 200 \cdot (40 + 8,924)} + \frac{0,05}{2 \cdot 200}}} = 88,36$$

Bei einem Wert von w in Höhe von $\frac{1,6}{16} = 0,1$, dem ein r in Höhe von $\frac{0,8 + 1,6}{16} = 0,15$ entspricht, erhält man $x = 75,78$ und für $w = \frac{3,2}{16} = 0,2$, dem ein r in Höhe von $\frac{0,8 + 3,2}{16} = 0,25$ zugeordnet ist, ergibt sich $x = 61,05$.

Die Mengen, die einschließlich Ausfall zu beschaffen sind, können nach (10) berechnet werden. Sie betragen für $w = 0,05$, $y = 89,35$, für $w = 0,1$, $y = 77,24$ und für $w = 0,2$, $y = 62,97$.

den Kosten pro Zeiteinheit (Durchschnittskosten) für die *nächste* Bestellung ist[14]. Sobald Grenzkosten die Durchschnittskosten übersteigen ist es vorteilhafter, auf die Erhöhung der Bestellmenge zu verzichten und statt dessen nach t Zeiteinheiten eine neue Beschaffung durchzuführen. Zur Errechnung des Optimums hat man also zunächst die Kosten der im Kalkulationszeitpunkt vorzunehmenden Bestellung $[K_1(t)]$ und die Kosten der sich daran anschließenden Bestellung $[K_2(t)]$ als Funktion der Lagerzeit zu bestimmen. Dabei kann man von (8) ausgehen und x durch $t \cdot U$ ersetzen. Zusätzlich muß beachtet werden, daß im Zeitverlauf infolge der Preissteigerung der Wert des gebundenen Kapitals zunimmt und die durch Ausfall entstehenden Kosten steigen. Trägt man diesen Zusammenhängen Rechnung und verwendet die in (12) und (13) definierten Größen, dann erhält man aus (8):

$$\begin{aligned}
\text{(16a)}\quad K_1(t) = {} & K_{fp} + K_{fl} + k_{vp}\left(1 + \frac{s}{b}\right) \cdot t \cdot U + k_{vl2} \cdot t \\
& + \frac{k_{vp}}{2}\left[(r - w) + w \cdot \left(1 + \frac{ta}{2}\right)\right] \cdot U \cdot t^2 \\
& + \left[K_{fp} + K_{fl} + k_{vp} \cdot U \cdot t \left(1 + \frac{ta}{2}\right)(1 + s)\right] \cdot \frac{i \cdot t}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(16b)}\quad K_2(t) = {} & K_{fp} + K_{fl} + k_{vp} \cdot (1 + ta) \cdot U \cdot t + k_{vp} \cdot \frac{s}{b} \cdot U \cdot t \\
& + k_{vl2} \cdot t + \frac{k_{vp}}{2}\left[(r - w) + w\left(1 + \frac{3ta}{2}\right)\right] U \cdot t^2 \\
& + \left[K_{fp} + K_{fl} + k_{vp} \cdot U \cdot t \cdot \left(1 + \frac{3ta}{2}\right) \cdot (1 + s)\right] \frac{i \cdot t}{2}.
\end{aligned}$$

Dabei ist unterstellt, daß die optimalen Lagerzeiten beider Bestellmengen gleich lang sind. Diese Annahme ist zwar strenggenommen unzulässig; der Unterschied zwischen aufeinanderfolgenden optimalen Lagerzeiten ist jedoch so gering, daß er vernachlässigt werden kann. Zur Bestimmung des Optimums muß man (16 a) nach t differenzieren, (16 b) durch t dividieren und die Ergebnisse einander gleichsetzen. Ersetzt man in der sich ergebenden Gleichung t durch $\frac{x}{U}$ und löst diese Gleichung nach x auf, so erhält man das Optimierungskriterium

$$\text{(17)}\qquad x = \sqrt{\frac{2\,U\,(K_{fp} + K_{fl})}{k_{vp}\,[r + (1 + s) \cdot i - 2a]}}$$

Je stärker der Preis des einzukaufenden Gutes steigt (sinkt), desto stärker liegt die aus (17) folgende Menge über (unter) der Bestellmenge, die ohne Preisänderung optimal ist. Dabei ist jedoch noch nicht berücksichtigt, daß einer Erhöhung der Bestellmengen Restriktionen entgegenstehen können, z. B. im Finanz-, Lager- und Produktionsbereich. Welche Konsequenzen sich ergeben, wenn derartige Restriktionen nicht beachtet werden, zeigt

---

[14] Die Kostenerhöhung ist dabei gleich den Grenzkosten in bezug auf die Lagerzeit, und es zählen dazu sowohl die Kosten der zusätzlich bestellten Einheit als auch die zusätzlichen Lager- und Zinskosten, welche daraus resultieren, daß die Bestellung einer zusätzlichen Einheit auch die Lagermenge, die Kapitalbindung und die Lagerzeit erhöht.

Bei im Zeitverlauf konstanten Preisen sind die Durchschnittskosten der nächsten Bestellung gleich den Durchschnittskosten der gerade vorzunehmenden Bestellung. Solange diese Bedingung erfüllt ist, spielt es deshalb keine Rolle, daß eigentlich die Durchschnittskosten einer noch in der Zukunft liegenden Bestellung die Vergleichsgröße für die Grenzkosten der gerade vorzunehmenden Bestellung sind. Sobald die genannte Bedingung nicht erfüllt ist, muß dieser Zusammenhang jedoch beachtet werden.

sich dann besonders deutlich, wenn $r + (1 + s) \cdot i$ gleich $2a$ wird; dann ist die optimale Bestellmenge gleich unendlich[15].

2. *Einmalige Preiserhöhung*[16]

Es sei nun der Fall untersucht, daß der Einstandspreis eines Produktes einmalig um einen bestimmten Prozentsatz α steigt, danach aber auf dem erhöhten Niveau konstant bleibt. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß der Lagerbestand im Kalkulationszeitpunkt auf Null abgesunken ist[17].

Auch in dem hier anstehenden Fall gilt Kriterium (15). Die vereinfachende Annahme, daß die optimalen Lagerzeiten aufeinanderfolgender Bestellungen gleich lang sind, ist unter der Bedingung einer einmaligen Preiserhöhung jedoch nicht gerechtfertigt. Infolge der Preiserhöhung ist die optimale Lagerzeit der im Kalkulationszeitpunkt vorzunehmenden Bestellung (t_1) größer, die optimale Lagerzeit der nachfolgenden Bestellung (t_2) kleiner, als sie ohne Preiserhöhung wären; t_2 läßt sich hier jedoch einfach aus der üblichen Formel für die optimale Lagerdauer errechnen, wenn man berücksichtigt, daß zu Beginn der Lagerzeit t_2 der Einkaufspreis gleich $k_{vp}\,(1 + \alpha)$ ist[18].

Die Kostengleichungen für $K_1(t_1)$ und $K_2(t_2)$ kann man analog zu (16a) bzw. (16b) aufstellen. Wegen der Einmaligkeit der Preiserhöhung ist jedoch für $(1 + ta)$ stets $(1 + \alpha)$ zu setzen; in (16a) ist t_1, in (16b) t_2 als Lagerdauer einzusetzen. Der Kostenwert eines lagernden Stückes beträgt für beide Bestellungen $k_{vp}\,(1 + \alpha)$. Wenn man gemäß (15) $K_1(t_1)$ nach t_1 differenziert und $K_2(t_2)$ durch t_2 dividiert, ergibt sich nach Gleichsetzen und Vornahme möglicher Vereinfachungen

$$k_{vp} \cdot U\,[w\,\alpha + r + (1 + s)\,(1 + \alpha)\,i\,]\,(t_1 - \frac{t_2}{2}) = \frac{K_{fp} + K_{fl}}{t_2} + k_{vp} \cdot U \cdot \alpha. \tag{18}$$

Setzt man für die Lagerzeiten $t_1 = \frac{x_1}{U}$ bzw. $t_2 = \frac{x_2}{U}$ und beachtet, daß

$$x_2^2 = \frac{2\,U\,(K_{fp} + K_{fl})}{k_{vp}\,/w\,\alpha + r + (1 + s)\,(1 + \alpha)\,i/},$$

---

[15] Unter Verwendung des Zahlenbeispiels zu (9) erhält man für $a = 0{,}05$ (was einer Preissteigerung von 5 % in einem Jahr entspricht)

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot (40 + 8{,}924)}{16\,(0{,}1 + 1{,}02 \cdot 0{,}05 - 0{,}1)}} = \sqrt{23\,982{,}35} = 154{,}85$$

Bei $a = 0{,}075$ ergibt sich schon $x = 1106$, und für eine Preissteigerung von mehr als 7,50 % ($a \geqslant 0{,}07505$) wird $x = \infty$.

[16] Der folgende Abschnitt gilt für die optimale Losgröße nur insoweit, als ein Betrieb unterbeschäftigt ist.

[17] Sofern unmittelbar vor der Preiserhöhung noch ein Bestand vorhanden ist, ermittelt man die tatsächlich zu bestellende Menge durch Subtraktion des vorhandenen Bestandes von der errechneten optimalen Bestellmenge. Eine Bestellung, obwohl noch ein Bestand vorhanden ist, lohnt sich jedoch nur dann, wenn die Kosten pro bestellte Einheit für die wegen der bevorstehenden Preiserhöhung früher bestellte Menge nicht höher sind als die Kosten pro bestellte Einheit für die erste Bestellung nach Eintritt der Preiserhöhung; weil die bestellfixen Kosten sich nur auf die tatsächlich bestellte Menge verteilen, braucht diese Bedingung nicht in jedem Falle erfüllt zu sein und muß zusätzlich geprüft werden.

[18] $t_2 = \frac{x_2}{U} = \sqrt{\frac{2\,(K_{fp}+K_{fl})}{U \cdot k_{vp}\,[(1 + \alpha) \cdot i \cdot (1 + s) + r + w\alpha]}}$

dann erhält man nach einigen Umformungen

$$x_1 = \sqrt{\frac{2\,U\,(K_{fp} + K_{fl})}{k_{vp}\,/i\,(1+s)\,(1+\alpha) + w\,\alpha + r/}} + \frac{U \cdot \alpha}{i\,(1+s)\,(1+\alpha) + w\alpha + r}$$ [19]

VI. Der Einfluß der Produktionszeit auf die optimale Losgröße[20]

Häufig wird in der Literatur die Produktionszeit eines Loses vernachlässigt bzw. als unendlich klein unterstellt. Dadurch bleiben vor allem zwei Probleme unbeachtet:

1) Durch die Existenz von Produktionszeiten wird die Reihenfolge, in der die Lose verschiedener Produktarten zeitlich aufeinanderfolgen müssen, damit in jedem Zeitpunkt die Lieferfähigkeit gewahrt wird, zum Problem. Dieses Reihenfolgeproblem kann nur im Wege einer simultanen Bestimmung der Losgrößen aller dieselben Produktionskapazitäten beanspruchenden Produktarten gelöst werden[21].

2) Durch die Erstellung eines Loses wird während dessen Fertigungszeit Kapital im Produktionsbereich gebunden. Die Verzinsung dieses Kapitals ist bei der Bestimmung der optimalen Losgröße zu berücksichtigen[22].

Im folgenden wird nur eine Lösung des zuletzt genannten Problems aufgezeigt. Für die Ermittlung des im Produktionsbereich gebundenen Kapitals sind neben den bisher bereits als Produktionskosten berücksichtigten Kostenkategorien die kalenderzeitabhängigen „normalen" Fixkosten des Produktionsbereiches von Bedeutung. Diese Fixkosten sind zwar von der Produktmenge und der Produktart unabhängig. Durch die Produktion werden sie jedoch in den erstellten Produkten gebunden. Je größer ein Los ist, um so höher ist die durch seine Erstellung verursachte Kapitalbindung, und um so länger dauert es, bis diese Fixkosten wieder freigesetzt werden. Würde jedes Stück einzeln produziert und sofort abgesetzt, dann ergäbe sich praktisch keine Kapitalbindung der genannten Art.

Natürlich kann eine Kapitalbindung nur insoweit erfolgen, als diese Kosten Ausgaben hervorrufen (fixe Löhne und Gehälter, Mieten usw.). Diese ausgabengleichen fixen Kosten bezeichnen wir mit K_{ca} und nehmen an, daß sie proportional zur Kalenderzeit anfallen. Zur Kapitalbindung eines Loses gehört demnach der Teil der K_{ca}, der während dessen Produktionszeit anfällt.

Die Produktionszeit eines Loses wird im folgenden mit t_p bezeichnet. Sie ist gleich $\frac{x}{V}$,

---

[19] Ausgehend vom Zahlenbeispiel zu (14) erhält man aus (19) für w = 0,1, wenn $\alpha = 0{,}05$ (was einer Preisanhebung um 5 % entspricht),

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot (40 + 8{,}924)}{16\,(0{,}05 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}05 + 0{,}1 \cdot 0{,}05 + 0{,}1)}} + \frac{200 \cdot 0{,}05}{0{,}05 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}05 + 0{,}1 \cdot 0{,}05 + 0{,}1}$$
$$= 87{,}82 + 63{,}07 = 150{,}89$$

Für $\alpha = 0{,}1$ ergibt sich $x = 85{,}81 + 120{,}41 = 206{,}22$ und für $\alpha = 0{,}2$ erhält man $x = 82{,}16 + 220{,}75 = 302{,}91$

[20] Die Ausführungen in Abschnitt VI gelten nur für die optimale Losgröße.

[21] Vgl. hierzu die in Fußnote 2 angegebene Literatur.

[22] Vgl. hierzu H. Schlüter, Zum Problem ..., a.a.O., S. 195 ff.; derselbe, Untersuchungen zum Problem ..., a.a.O.

wenn V die Produktionsgeschwindigkeit angibt[23]. Der während der Produktionszeit eines Loses anfallende Teil von K_{ca} beträgt demnach

$$K_{ca} \cdot t_p = K_{ca} \cdot \frac{x}{V}.$$

Wenn man die Produktionszeit berücksichtigt, ist es für die Ermittlung der Kapitalbindung zweckmäßig, zwei Arten des Lagerzuganges zu unterscheiden.

1. Einmaliger Lagerzugang

Einmaliger Lagerzugang liegt dann vor, wenn ein Los erst nach Fertigstellung aller Stücke als Ganzes auf Lager gegeben wird. In diesem Falle ist der maximale Lagerbestand gleich der Losgröße; die Produktion eines Loses muß so rechtzeitig begonnen werden, daß das ganze Los in dem Zeitpunkt auf Lager gehen kann, in dem der Lagerbestand erschöpft ist.

Die Zinskosten im Produktionsbereich $Z_p(x)$ erhält man, wenn man das dort durchschnittlich gebundene Kapital mit der Poduktionsdauer $\frac{x}{V}$ und dem Zinssatz i multipliziert:

(20) $$Z_p(x) = (K_{ca} \cdot \frac{x}{V} + K_{fp} + k_{vp} \cdot x) \frac{i \cdot x}{2 \cdot U}$$

Die Zinskosten im Lagerbereich $Z_l(x)$ betragen entsprechend

(21) $$Z_l(x) = (K_{ca} \cdot \frac{x}{V} + K_{fp} + k_{vp} \cdot x + K_{fl} + b \cdot k_{vl1} \cdot x) \frac{i \cdot x}{2 \cdot U}$$

$K_{ca} : V$ drückt man zweckmäßigerweise als Prozentsatz von k_{vp} aus und setzt fest:

$$\frac{K_{ca}}{V} = q \cdot k_{vp}\ .$$

Nach Vornahme dieser Veränderung sind (20) und (21) nunmehr in (8) an Stelle des letzten Summanden einzusetzen. Division des sich ergebenden Ausdrucks durch x, anschließende Differentiation nach x und Vornahme einiger Umformungen ergeben das Optimierungskriterium

(22) $$x = \sqrt{\frac{2\,U\,(K_{fp} + K_{fl})}{k_{vp}\{ i\,[s + (1 + q)\,(1 + \frac{U}{V})\,] + r\}}}$$ [24]

---

[23] V gibt die Menge an, die von dem betrachteten Produkt unter Berücksichtigung der zur Verfügung stehenden Kapazität in einem Jahr gefertigt werden könnte. V hat also die Dimension „Mengeneinheiten pro Jahr" und ist eine theoretische Größe, da kein Mehr-Produkt-Betrieb eine Produktart, für die eine optimale Losgröße relevant ist, ein ganzes Jahr lang ununterbrochen fertigt. Das stört aber nicht, weil die Losgröße ja als Produkt aus der Produktionsgeschwindigkeit und der Produktionszeit (t_p) definiert ist.

[24] Zusätzlich zu den bisherigen Zahlenwerten seien V = 10 000 und

$$q = \frac{K_{ca/V}}{k_{vp}} = \frac{2{,}4}{16} = 0{,}15. \text{ Dann gilt}$$

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot (40 + 8{,}924)}{16 \cdot \{0{,}05\ (0{,}02 + 1 + 0{,}15)\ (1 + \frac{200}{10\,000}) + 0{,}1\}}} = \sqrt{7660{,}23} = 87{,}52$$

2. Täglicher Lagerzugang

Vom „täglichen Lagerzugang" sprechen wir dann, wenn während der Produktionszeit eines Loses die Nachfrage unmittelbar aus der Produktion befriedigt und der nicht abgesetzte Teil der Produktion täglich auf Lager gegeben wird. Der maximale Lagerbestand ist in diesem Falle um die während der Produktionszeit verkaufte Menge niedriger als das Gesamtlos. Da unmittelbar aus der Produktion verkauft wird, braucht erst in dem Zeitpunkt, in dem der Lagerbestand erschöpft ist, mit der Erstellung eines neuen Loses begonnen zu werden. Diese Gegebenheiten beeinflussen die Lagerkosten sowie die Kapitalbindung im Produktions- und im Lagerbereich.

Die fixen Lagerkosten K_{fl} fallen bei jedem einzelnen Lagerzugang an. Bei T Lagerzugängen in einem Jahr betragen diese Kosten also pro Los

$$K_{fl} \cdot T \cdot t_p = K_{fl} \cdot T \cdot \frac{x}{V}.$$

Die von der Lagermenge abhängigen Lagerkosten sinken, da die sofort verkauften Stücke keine Lagerkosten verursachen; eingelagert werden nur

$$x - U \cdot t_p = x - \frac{U \cdot x}{V} = x\left(1 - \frac{U}{V}\right)$$

Produkteinheiten.

Die Gesamtlagerkosten betragen infolgedessen

$$K_l(x) = K_{fl} \cdot T \cdot \frac{x}{V} + \frac{k_{vl2} \cdot x}{U} + \left(k_{vl1} + k_{vl3} \cdot \frac{x}{2U}\right) \cdot x \cdot \left(1 - \frac{U}{V}\right). \tag{23}$$

Da der maximale Lagerbestand nur das $(1 - \frac{U}{V})$-fache der Losgröße beträgt, ist auch das durchschnittlich im Lager gebundene Kapital entsprechend niedriger. Für die Zinskosten pro Los erhält man unter Beachtung der dargestellten Zusammenhänge

$$Z(x) = \frac{K_{fl} \cdot T \cdot x}{V} + \left(\frac{K_{ca}}{V} \cdot x + K_{fp} + k_{vp} \cdot x + b \cdot k_{vl1} \cdot x\right) \cdot \left(1 - \frac{U}{V}\right) \frac{i \cdot x}{2 \cdot U} \tag{24}$$

(23) und (24) sind an Stelle des zweiten und dritten Summanden in (8) einzusetzen. Für das Optimum der sich auf diese Weise ergebenden Kostenfunktion gilt das Kriterium (wobei zur Vereinfachung $(K_{fl} \cdot T) : V$ durch $z \cdot k_{vp}$ ersetzt wird)

$$x = \sqrt{\frac{2\,U\,K_{fp}}{k_{vp}\left\{\left(1 - \frac{U}{V}\right) \cdot [i\,(q + 1 + s) + r] + z \cdot i\right\}}} \tag{25}$$ [25]

[25] Wenn z. B. $z = \frac{K_{fl} \cdot T}{V \cdot k_{vp}} = \frac{8{,}924 \cdot 240}{10\,000 \cdot 16} = 0{,}0134$, dann erhält man

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot 40}{16\left\{\left(1 - \frac{200}{10\,000}\right) \cdot [0{,}05\,(0{,}15 + 1 + 0{,}02) + 0{,}1] + 0{,}0134 \cdot 0{,}05\right\}}}$$

$$= \sqrt{6410{,}26} = 80{,}06$$

VII. Der Einfluß des erzielbaren Verkaufspreises auf die optimale Bestellmenge und die optimale Losgröße

Der Verkaufspreis der Produkte, für die eine optimale Bestellmenge bzw. eine optimale Losgröße zu ermitteln ist, wird in der Literatur üblicherweise nicht berücksichtigt; auch hier ist das bisher nicht geschehen. Unterstellt man, daß das Ziel eines Betriebes in der Maximierung des Gewinnes besteht, dann ist ein solches Vorgehen nur dann berechtigt, wenn sowohl die Absatzmenge als auch der Verkaufspreis fix vorgegeben sind. Das läßt sich leicht beweisen; ermittelt man den Erlös und die Kosten für den Zeitraum eines Jahres in Abhängigkeit von der während dieses Jahres abgesetzten Menge U und der Bestellmenge bzw. Losgröße x, dann gilt für den Gewinn eines Jahres die Funktion

$$(26) \quad G(U;x) = p(U) \cdot U - K(U;x) \cdot \frac{U}{x}.$$

Dabei bedeutet $p(U) \cdot U$ das Produkt aus dem Verkaufspreis $p(U)$ und der Absatzmenge U, also den während des Jahres erzielten Erlös. $K(U;x)$ sind die Kosten einer Bestellung bzw. eines Loses und $\frac{U}{x}$ die Bestell- bzw. Auflagehäufigkeit für ein Jahr. $K(U;x) \cdot \frac{U}{x}$ sind also die Kosten, welche durch die Produktion der Menge U verursacht werden. Zur Bestimmung von $K(U;x)$ sei von der weiter oben angegebenen Gleichung (8) ausgegangen. Die Ordnung der einzelnen Summanden nach ihrer Abhängigkeit von U und x ergibt

$$\begin{aligned}(28) \quad K(U;x) = {} & K_{fp} + K_{fl} \\ & + (k_{vp} + k_{vl1}) \cdot x \\ & + [2k_{vl2} + (K_{fp} + K_{fl}) \cdot i] \cdot \frac{x}{2U} \\ & + [k_{vl3} + (k_{vp} + b \cdot k_{vl1})] \cdot \frac{x^2}{2U}\end{aligned}$$

Es sei nun folgende vereinfachende Schreibweise eingeführt

$$(29) \quad K_{fp} + K_{fl} = K_f$$

$$(30) \quad k_{vp} + k_{vl1} = k_{v1}$$

$$(31) \quad 2k_{vl2} + (K_{fp} + K_{fl}) \cdot i = k_{v2}$$

$$(32) \quad k_{vl3} + (k_{vp} + b \cdot k_{vl1}) \cdot i = k_{v3}$$

Verwendet man diese Schreibweise in (28), multipliziert danach (28) mit $\frac{U}{x}$ und setzt das Ergebnis in (26) ein, so erhält man

$$(33) \qquad G(U;x) = p(U) \cdot U - \frac{K_f \cdot U}{x} - k_{v1} \cdot U - \frac{k_{v2}}{2} - \frac{k_{v3} \cdot x}{2}$$

Wenn man diese Funktion unter der Bedingung, daß U und p (U) konstant sind, zur Bestimmung des Gewinnmaximums nach x differenziert, dann erhält man als Maximierungskriterium

$$(34) \qquad x = \sqrt{\frac{2\,U\,K_f}{k_{v3}}}.$$

Nach Einsetzen des aus (32) folgenden Wertes für k_{v3} zeigt sich, daß (34) mit (9) identisch ist. Das bedeutet: Eine Außerachtlassung des Verkaufspreises bei der Bestimmung der optimalen Bestellmenge bzw. optimalen Losgröße entspricht nur dann einer Maximierung des Gewinnes, wenn der Verkaufspreis und die Absatzmenge eines Jahres konstant vorgegeben sind. Dies ist eine sehr einschränkende Bedingung, und es stellt sich unmittelbar die Frage, wie die Rechnung zu verändern ist, wenn andere Marktformen gelten.

Geht man von einer Marktform aus, für welche der Marktpreis zwar konstant ist, jedoch der Absatz beliebiger Mengen zu diesem Preis möglich ist (atomistische Konkurrenz), dann werden die optimale Bestellmenge und die optimale Losgröße unter der Zielsetzung der Gewinnmaximierung unendlich groß. Wenn man nämlich (33) unter der Bedingung, daß der Verkaufspreis p konstant ist, partiell nach U differenziert, ergibt sich als Maximierungskriterium

$$(35) \qquad p = \frac{K_f}{x} + k_{v1}.$$

Dieses Kriterium enthält nur Größen, die ceteris paribus in bezug auf U konstant sind und parallele Geraden ergeben, wenn sie in Abhängigkeit von U dargestellt werden; sie schneiden sich also erst für $U = \infty$ [26]. Bei atomistischer Konkurrenz sind somit optimale Bestellmenge und optimale Losgröße nicht eindeutig definiert. Erst durch die Einführung von Kapazitätsrestriktionen und von anderen Optimierungsverfahren (z. B. der linearen Programmierung, bei deren Anwendung für die Bestimmung des gewinnmaximalen Produktionsprogrammes ebenfalls von atomistischer Konkurrenz ausgegangen wird) kann eine sinnvolle Begrenzung der Bestellmengen und der Losgrößen erreicht werden.

Eine völlig andere Situation ergibt sich, wenn der erzielbare Verkaufspreis mit steigendem U fällt, wenn also ein Monopol oder eine monopolähnliche Situation vorliegt. Partielle Differentiation von (33) nach U und nach x ergibt dann für den Gewinn die Maximierungskriterien

$$(36) \qquad E'(U) - k_{v1} = \frac{K_f}{x}$$

und

$$(37) \qquad x = \sqrt{\frac{2\,U\,K_f}{k_{v3}}}$$

Aus den beiden Kriterien können die gewinnmaximalen Werte von U und x berechnet werden. Verhältnismäßig einfach kann auch eine geometrische Ermittlung vorgenommen werden. Dazu stellt man (vgl. Abb. 4) im rechten oberen Quadranten $\frac{K_f}{x}$ in Abhängigkeit von x dar. Im rechten unteren Qudranten ordnet man den auf der Abszisse aufgetragenen Werten diejenigen Werte von U zu, für welche die zugehörigen x-Werte optimale Bestellmengen bzw. Losgrößen sind. Die entsprechende Funktion für U kann leicht aus (37) abgeleitet werden; sie lautet

$$(38) \qquad U = \frac{k_{v1}}{2K_f} \cdot x^2.$$

---

[26] Zum gleichen Ergebnis kommt man auch, wenn man das Optimierungskriterium, das sich bei partieller Differentiation von (33) in bezug auf x ergibt, in $K(U;x) \cdot \frac{U}{x} = \frac{K_f \cdot U}{x} + k_{v1} \cdot U + \frac{k_{v2}}{2} + \frac{k_{v3} \cdot x}{2}$ einsetzt. Man erhält $K(U;x) \cdot \frac{U}{x} = \frac{k_v}{2} + k_{v1} \cdot U + \sqrt{2K_f \cdot k_{v3} \cdot}\ \sqrt{U}$, eine Funktion also, die in bezug auf U fallende Grenzkosten aufweist. Ihre Subtraktion von dem durch $E(U;x) = p \cdot U$ definierten Erlös ergibt einen Gewinn, der mit steigendem U monoton zunimmt.

Nach Einzeichnung einer 45°-Linie im linken unteren Quadranten kann nun im linken oberen Quadranten die Kurve $\frac{K_f}{x}$ in Abhängigkeit von den U-Werten dargestellt werden, welche zu den entsprechenden x-Werten optimal sind. Zeichnet man in den linken oberen Quadranten zusätzlich die um k_{v1} nach unten verschobene Grenzerlöskurve ein, dann definiert der Schnittpunkt der beiden in diesem Quadranten eingetragenen Kurven die einander zugeordneten, gewinnmaximalen Werte für den Verkaufspreis, die Absatzmenge und die optimale Bestellmenge bzw. Losgröße (in Abb. 4 sind es der Preis p_0, die Absatzmenge U_0 und die Bestellmenge bzw. Losgröße x_0).

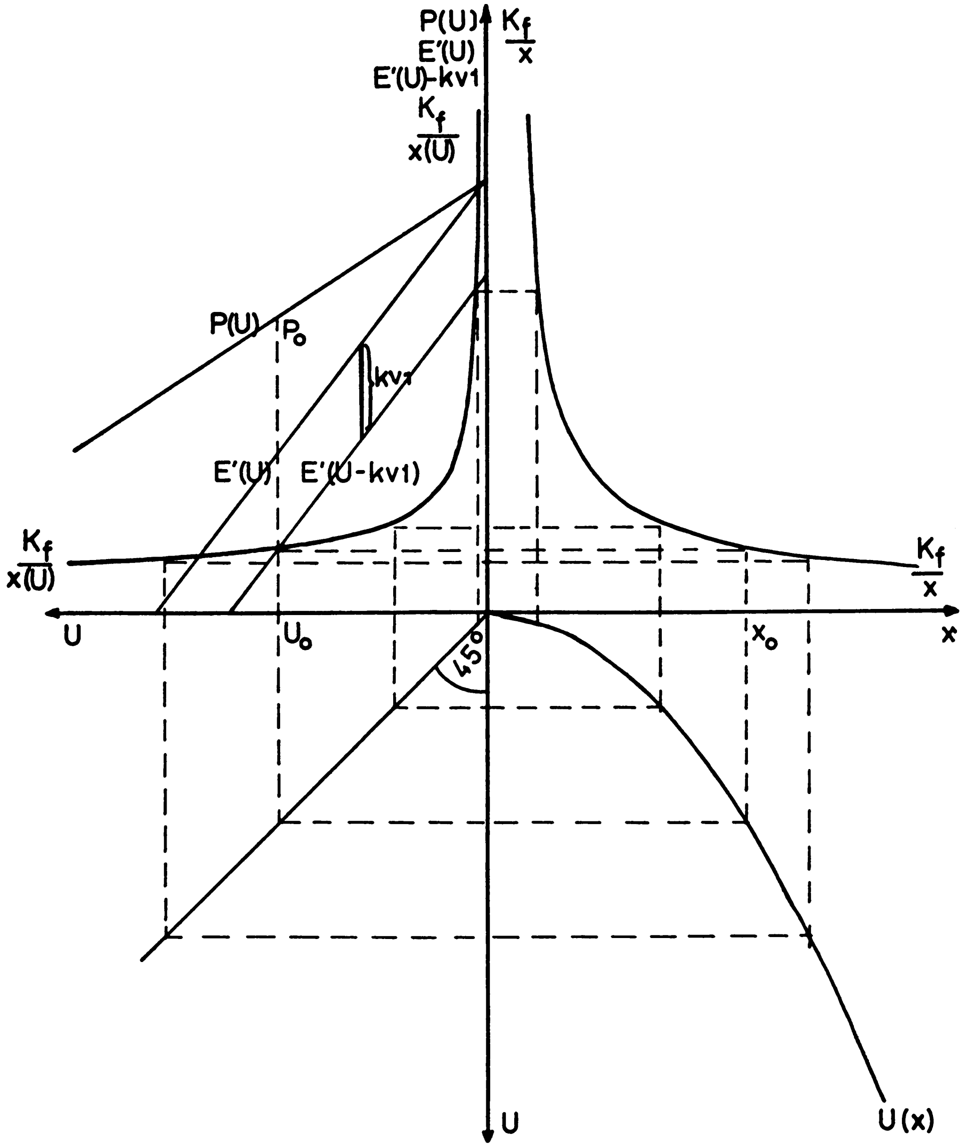

Abb. 4: Die geometrische Bestimmung der gewinnmaximalen Werte für die Absatzmenge, den Verkaufspreis und die Bestellmenge bzw. Losgröße, wenn die Absatzmenge von der Höhe des Verkaufspreises abhängig ist.

VIII. Zusammenfassung

Die vorliegende Untersuchung sollte zeigen, daß bei der Ermittlung von optimalen Bestellmengen und optimalen Losgrößen gewisse Einflüsse zu berücksichtigen sind, die von den Bereichen der Lagerung, des Einkaufs, der Produktion und des Absatzes ausgehen. Es konnte dargestellt werden, daß für eine exakte Ermittlung der genannten Größen eine analytische Behandlung der Lagerkosten, die gesonderte Erfassung des Ausfalls, die Berücksichtigung von Preisänderungen auf dem Beschaffungsmarkt, der Kapitalbindung im Produktionsbereich und der Preisstellung auf dem Absatzmarkt erforderlich sind. Daß die genannten Einflußgrößen verhältnismäßig stark auf die optimale Bestellmenge und die optimale Losgröße einwirken, geht bereits aus den eingefügten Zahlenbeispielen hervor. Es konnte aber auch gezeigt werden, daß unter gewissen Umständen — vor allem bei Preissteigerungen auf dem Beschaffungsmarkt — die Bestimmung der optimalen Bestellmenge und der optimalen Losgröße ohne die Berücksichtigung von Restriktionen für die Lager- und/oder Produktionskapazität sowie für das verfügbare Kapital zu nicht sinnvollen Ergebnissen führt, da dann die optimale Bestellmenge bzw. die optimale Losgröße unrealistisch große Werte annimmt.