Paket

Zahlen E 5

„Ich kann Zahlen in unterschiedlichen Formen darstellen, deren Darstellunsgformen vergleichen und mathematisch deuten.“

Teilziele

Mathematik Zahlen E 5

Materialien	Teilziele	✔
1, 2, 3, 4	Ich kenne die Bedeutung und den Aufbau römischer Zahlen und kann diese in unser Zahlensystem und zurück übersetzen.	
5, 6, 7, 8	Ich kenne das Dualsystem und kann Zahlen vom Dezimal- ins Dualsystem und umgekehrt übersetzen.	

12345

Stempelkarte

Mathematik Zahlen E 5

FILM: Römische Zahlen 1	INFO: Römische Zahlen 2	AB: Römische Zahlen 3
APP: Römische Zahlen 4	FILM: Das Zweiersystem 5	INFO: Das Dualsystem 6
AB: Das Dualsystem 7	APP: Das Dualsystem 8	

Bereitgestellt von: MNWeG
Stand: 20.02.2023
Lizenzhinweise:
CC BY SA

Römische Zahlen

Was ist sind Römische Zahlen? Wofür stehen die Buchstaben in Römischen Zahlen? Welche Regeln müssen beim Schreiben von Römischen Zahlen beachtet werden?

YouTube-Video

Link: https://youtu.be/agDSxE1ZXnk

An alten Gebäuden oder auch auf Schmuckstücken oder alten Münzen finden sich manchmal Inschriften, die aus den Buchstaben I, V, X, L, C, D und M bestehen. Bei solchen Inschriften handelt es sich um Römische Zahlen.
Die heute verwendeten Ziffern 0 bis 9 stammen aus Indien und wurden im Mittelalter von den Arabern nach Europa gebracht, weshalb sie auch arabische Ziffern genannt werden. Sie gehören zum Dezimalsystem, bei dem jede Stelle in der Zahl eine Bedeutung hat. Das ist bei den Römischen Zahlen anders. Bei ihnen steht jeder Buchstabe für eine bestimmte Anzahl.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1.000

Die Zeichen I (1), X (10), C (100) und M (1.000) sind die Grundzeichen bei den Römischen Zahlen. V (5), L (50) und D (500) werden als Zwischenzeichen bezeichnet.

An der Kirche St. Ägidius in Wolfmannshausen (Thüringen) steht ein Stein mit der Inschrift MDCXV. Um die Römische Zahl in eine arabische Zahl umzurechnen, werden die Werte der Zahlzeichen addiert:

M D C X V
1.000 **+** 500 **+** 100 **+** 10 **+** 5 = 1.615

In der Kirche St. Martin im bayerischen Hechenwang steht die Römische Zahl MDCCXIV. Hier ist bei der Umrechnung in eine arabische Zahl eine Besonderheit zu beachten: Die Zahlen sind nicht nach der Größe sortiert. Das I mit dem Wert 1 steht vor dem V mit dem Wert 5.
In so einem Fall muss der Wert der vorgerückten Zahl abgezogen werden:

M D C C X I V
1.000 + 500 + 100 + 100 + 10 + 5 **– 1** = 1.714

Addition und Subtraktion

Die Werte der Zahlzeichen werden addiert, wenn die Zahlzeichen von links nach rechts kleinere oder gleiche Werte haben. Die Zahlzeichen I, X und C können auch subtrahiert werden. Sie werden subtrahiert, wenn sie links von einem werthöheren Zahlzeichen stehen.

CC BY SA

I	II	III	IV	V
1	1 + 1 = 2	1 + 1 + 1 = 3	5 – 1 = 4	5

Die Subtraktionsregel wird angewendet, wenn ein Zahlzeichen häufiger als dreimal hintereinander stehen müsste, um eine Zahl zu bilden. Das ist immer dann der Fall, wenn die Zahl in arabischen Ziffern eine 4 oder 9 enthält.

Wiederholung von Zahlzeichen

Die Grundzeichen I, X, C und M dürfen höchstens dreimal hintereinander stehen. Die Zwischenzeichen V, L und D dürfen sich gar nicht wiederholen.

Schrittweise Subtraktion

Von dem Wert eines Zahlzeichens kann nur der Wert des nächstkleineren Grundzeichens (I, X oder C) subtrahiert werden.

XCIX

Bei dieser Zahl muss zweimal subtrahiert werden:

X C I X

100 – 10 + 10 – 1= 99

Es wäre auch denkbar, durch die Rechnung 100 – 1 auf 99 zu kommen. Das ist jedoch nicht erlaubt, da von der Hundert nur die Zehn abgezogen werden darf.

Nicht alle Zahlen sind möglich

Die Römischen Zahlen haben als höchstes Zahlzeichen das „M“ mit dem Wert 1.000. Wenn entsprechend der Regel das „M“ nicht häufiger als dreimal hintereinander stehen darf, ist es nicht möglich Zahlen zu bilden, die größer als 3.888 (MMMDCCCLXXXVIII) sind. Ebenso fehlt dem System ein Symbol für die Null.

CC BY SA

① Verbinde die Römischen Zahlen mit den gleichwertigen Zahlen in arabischen Ziffern.

MDCL ●	○ 506
XIV ●	○ 1.011
XLIV ●	○ 14
LXVI ●	○ 44
DVI ●	○ 1.650
CDLI ●	○ 451
XVI ●	○ 66
XXI ●	○ 195
MXI ●	○ 21
CXCV ●	○ 16

② Gib die Zahl mit arabischen Ziffern an.

a) MDXXI	b) CXLIV	c) MMCD	d) DCCCVI	e) CXVII	f) MDCXXXII

③ Auf der Uhr sind die Zahlen von eins bis zwölf als Römische Zahlen angegeben.
a) Trage die Zahlen in die Tabelle ein.

1	2	3	4	5	6

7	8	9	10	11	12

b) Bei einer der Zahlen wurde eine Regel zum Aufstellen Römischer Zahlen missachtet. Gib an, welche Zahl falsch ist und korrigiere den Fehler.

④ Gib die Zahl als Römische Zahl an.

a) 19	b) 74	c) 616	d) 1.102	e) 191	f) 122

⑤ a) Kreuze an, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.

(1) Wenn eine Römische Zahl auf V endet, endet die Zahl in arabischen Ziffern immer auf 5.

◯ wahr
◯ falsch

(2) Eine Römische Zahl, die aus vielen Zahlzeichen besteht, ist immer größer als eine Zahl, die aus wenig Zahlzeichen besteht.

◯ wahr
◯ falsch

(3) Es gibt Römische Zahlen, die zweimal hintereinander das Zahlzeichen X enthalten, aber keine Römischen Zahlen, die zweimal hintereinander das Zahlzeichen L enthalten.

◯ wahr
◯ falsch

(4) Kommt ein Zahlzeichen in einer Römischen Zahl mehrfach vor, so stehen die gleichen Zahlzeichen immer direkt nebeneinander.

◯ wahr
◯ falsch

b) Korrigiere die falsche Aussagen.

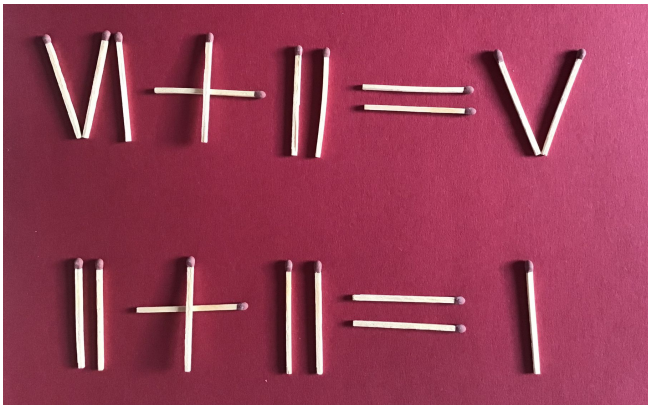
⑥ Gib jeweils die größte und die kleinste Zahl an, die sich mithilfe der Zahlzeichen bilden lässt.
a) I, X, L b) C, D, M c) I, I, V, C, D d) X, C, D, M, I e) I, X, X, X, X, C, D

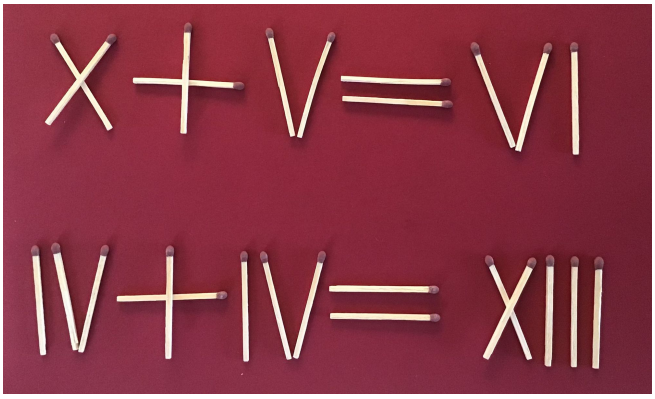
CC BY SA

⑦ Beim Aufstellen der folgenden Zahlen wurden Fehler gemacht. Korrigiere die Fehler und erläutere, welche Regeln missachtet wurden.

a) LLX b) XM c) MDCXXXX d) IXC

⑧ Bei den Streichholzrätseln muss jeweils ein Streichholz umgelegt werden, damit eine wahre Aussage entsteht. Ermittle, welches Streichholz die Position wechseln muss.





CC BY SA

Römische Zahlen zuordnen

Zahlenstrahl

Memory

Richtig oder falsch?

Zahlen im Zweiersystem

Können natürliche Zahlen mit nur zwei Ziffern gebildet werden? Wie lassen sich Zahlen im Zweiersystem darstellen? Wie werden Zahlen vom Zweiersystem ins Dezimalsystem umgerechnet?

Link: https://youtu.be/vCFgDxY6YxE

YouTube-Video

Das bei uns gebräuchliche Zahlensystem wird Dezimalsystem [von lateinisch „decimus“ *Zehnter*] genannt. Es enthält die zehn verschiedenen Ziffern 0 bis 9. Um in der Stellenwerttafel eine Stufe nach oben zu gelangen, muss mit zehn multipliziert werden.

·10 ·10 ·10 ·10 ·10 ·10

1.000.000	100.000	10.000	1.000	100	10	1
10 · 100.000	10 · 10.000	10 · 1.000	10 · 100	10 · 10	10 · 1	1

So ähnlich ist es beim Dualsystem, das auch Zweiersystem oder Binärsystem genannt wird. Es kommt mit nur zwei Zeichen aus, nämlich 0 und 1. Wie das Dezimalsystem ist es ein Stellenwertsystem. Dabei ist die Umrechnungszahl 2.

·2 ·2 ·2 ·2 ·2 ·2

64	32	16	8	4	2	1
2 · 32	2 · 16	2 · 8	2 · 4	2 · 2	2 · 1	1

Ein Beispiel für eine Zahl im Dualsystem ist 10011_2 . Die tiefgestellte „2“ deutet darauf hin, dass die Zahl im Dualsystem steht. Manchmal wird statt der „1“ auch ein senkrechter Strich geschrieben, um zu verdeutlichen, dass eine Zahl im Dualsystem steht: I00I0. Um die Zahl ins Dezimalsystem umzurechnen, wird sie in die Stellenwerttafel eingetragen:

64	32	16	8	4	2	1
		1	0	0	1	1

Nun werden alle Zahlen addiert, bei denen eine „1“ steht: 16 + 2 + 1 = 19.
$10011_2 = 19$

Die Sprache der Computer

Das Dualsystem ist die Grundlage der meisten Computerprogramme. Dabei steht die „1“ dafür, dass ein Schalter aktiviert wird und die „0“ dafür, dass er inaktiv bleibt. Der Code, mit dem ein Computerprogramm geschrieben ist, wird auch Binärcode genannt.

CC BY SA

Um eine Zahl vom Dezimalsystem ins Dualsystem umzurechnen, wird eine Wertetabelle genutzt. Dabei wird zuerst die größtmögliche Zahl gesucht, die in die umzurechnende Zahl hineinpasst. Bei der Zahl 22 ist das die 16. In dieses Feld wird eine „1“ eingetragen. Wie beim Dezimalsystem bleiben die Felder links von dem ersten Feld, in das etwas eingetragen wird, leer.

64	32	16	8	4	2	1
		1				

Nun wird geschaut, wie groß der Rest ist: 22 – 16 = 6. Für den Rest wird wieder geprüft, welches die größtmögliche Zahl in der Stellenwerttafel ist, die in die Zahl hineinpasst. Das ist nun die 4. Dort wird wieder eine „1“ eingetragen. In alle Lücken davor kommt eine „0“.

64	32	16	8	4	2	1
		1	0	1		

Erneut wird der Rest bestimmt: 6 – 4 = 2. Die 2 kommt direkt in der Stellenwerttafel vor. Dort wird eine „1“ eingetragen. Weil es keinen weiteren Rest gibt, kommt in alle anderen Felder dahinter eine „0“.

64	32	16	8	4	2	1
		1	0	1	1	0

Damit ist die Umrechnung fertig. Die Probe zeigt: 16 + 4 + 2 = 22. Daher gilt: $22 = 10110_2$.

Wie werden Zahlen im Dualsystem vorgelesen?

Anders als im Dezimalsystem werden die Zahlen im Dualsystem Stelle für Stelle genannt und anschließend „im Dualsystem“ angehängt. Die Zahl 110101_2 wird daher gelesen: „eins eins null eins null eins im Dualsystem“.

CC BY SA

① Rechne die Zahlen aus dem Dualsystem in das Dezimalsystem um. Nutze dazu die Stellenwerttafel.

a) 101_2 b) 1010_2 c) 1000_2 d) 100_2 e) 111_2
f) 1011_2 g) 10101_2 h) 111001_2 i) 101011_2 j) 1100011_2

	64	32	16	8	4	2	1	Zahl im Dezimalsystem
a)					1	0	1	4 + 1 = 5
b)								
c)								
d								
e)								
f)								
g)								
h)								
i)								
j)								

② Wie das Dezimalsystem kann das Dualsystem für größere Zahlen beliebig erweitert werden. Große Zahlen haben dann mehr Stellen.
Wandle die Zahl 1000110101_2 ins Dezimalsystem um. Berechne dafür zuerst die Werte der einzelnen Stellen.

CC BY SA

③ Gib die Zahlen von 1 bis 10 im Dualsystem an.

④ Wandle die Zahlen mithilfe der Tabelle vom Dezimalsystem ins Dualsystem um.
a) 17 b) 23 c) 35 d) 85 e) 100

	Zahl als Summe	64	32	16	8	4	2	1	Zahl im Dualsystem
a)	17 = 16 + 1			1	0	0	0	1	10001_2
b)									
c)									
d									
e)									

⑤ Gib dein Geburtsdatum im Dualsystem an.

CC BY SA

⑥ a) Bestimme die Zahlen 1, 3, 7, 15 und 31 im Dualsystem.
b) Beschreibe, welche Gemeinsamkeit die Zahlen im Dualsystem haben.
c) Erläutere, wie es zu dieser Gemeinsamkeit kommt.

⑦ Gib den Vorgänger und den Nachfolger der Zahl im Dualsystem an.

	10_2	
	110_2	
	1000_2	
	11_2	
	1100_2	
	10011_2	

⑧ Erläutere, wie sich bei einer Zahl im Dualsystem auf einen Blick erkennen lässt, ob sie gerade oder ungerade ist.

⑨ Die Zahl 1 hat im Dezimalsystem und im Dualsystem den gleichen Wert: $1 = 1_2$. Untersuche, ob es weitere Zahlen gibt, auf die das zutrifft.

CC BY SA

Zahlen nach der Größe ordnen

Vom Dezimalsystem ins Dualsystem

Memory

Zahlen zuordnen

Lösungen

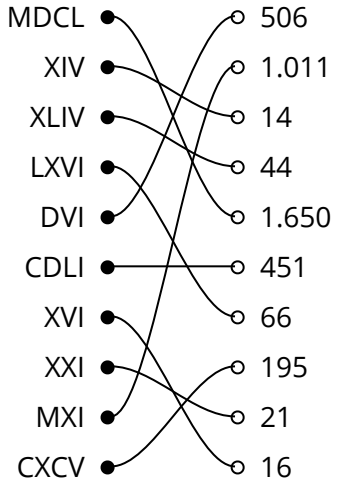
Zahlen E 5

AB: Römische Zahlen

Mathematik Zahlen E 5

3L

① Verbinde die Römischen Zahlen mit den gleichwertigen Zahlen in arabischen Ziffern.



② Gib die Zahl mit arabischen Ziffern an.

a) MDXXI	b) CXLIV	c) MMCD	d) DCCCVI	e) CXVII	f) MDCXXXII
1.521	144	2.400	806	117	1.632

③ Auf der Uhr sind die Zahlen von eins bis zwölf als Römische Zahlen angegeben.
a) Trage die Zahlen in die Tabelle ein.

1	2	3	4	5	6
I	II	III	IIII	V	VI

7	8	9	10	11	12
VII	VIII	IX	X	XI	XII

b) Bei einer der Zahlen wurde eine Regel zum Aufstellen Römischer Zahlen missachtet. Gib an, welche Zahl falsch ist und korrigiere den Fehler.

Die Zahl IIII muss IV heißen, da das Grundzeichen I nicht mehr als dreimal hintereinander stehen darf.

Lizenzhinweise: https://editor.mnweg.org/mnw/dokument/romische-zahlen-10

④ Gib die Zahl als Römische Zahl an.

a) 19	b) 74	c) 616	d) 1.102	e) 191	f) 122
XIX	LXXIV	DCXVI	MCII	CXCI	CXXII

⑤ a) Kreuze an, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.

(1) Wenn eine Römische Zahl auf V endet, endet die Zahl in arabischen Ziffern immer auf 5.

○ wahr
✓ falsch

(2) Eine Römische Zahl, die aus vielen Zahlzeichen besteht, ist immer größer als eine Zahl, die aus wenig Zahlzeichen besteht.

○ wahr
✓ falsch

(3) Es gibt Römische Zahlen, die zweimal hintereinander das Zahlzeichen X enthalten, aber keine Römischen Zahlen, die zweimal hintereinander das Zahlzeichen L enthalten.

✓ wahr
○ falsch

(4) Kommt ein Zahlzeichen in einer Römischen Zahl mehrfach vor, so stehen die gleichen Zahlzeichen immer direkt nebeneinander.

○ wahr
✓ falsch

b) Korrigiere die falsche Aussagen.

(1) Wenn eine Römische Zahl auf IV endet, endet die Zahl in arabischen Ziffern auf 4. Beispiel: XIV ist 14.
(2) Bei Römischen Zahlen kommt es nicht auf die Anzahl der Zahlzeichen, sondern auf ihren Wert an. So besteht 1.000 aus nur einem Zahlzeichen (M), ist aber größer als die Zahl 13, die aus vier Zahlzeichen besteht (XIII).
(4) In der Zahl 190 gibt es zweimal das Zahlzeichen C. Diese werden jedoch durch ein X getrennt: CXC.

⑥ Gib jeweils die größte und die kleinste Zahl an, die sich mithilfe der Zahlzeichen bilden lässt.
a) I, X, L b) C, D, M c) I, I, V, C, D d) X, C, D, M, I e) I, X, X, X, X, C, D

a) größte Zahl: LXI (61), kleinste Zahl: XLI (41)
b) größte Zahl: MDC (1.600), kleinste Zahl: MCD (1.400)
c) größte Zahl: DCVII (607), kleinste Zahl: CDVII (407)
d) größte Zahl: MDCXI (1.611), kleinste Zahl: MCDIX (1.409)
e) größte Zahl: DCXXXIX (639), kleinste Zahl: CDXXXIX (439)

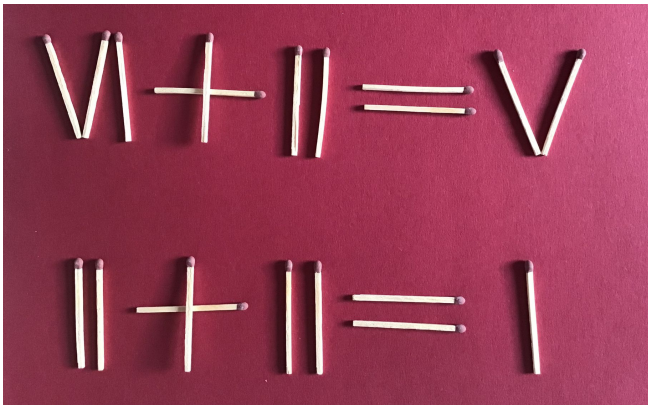
CC BY SA

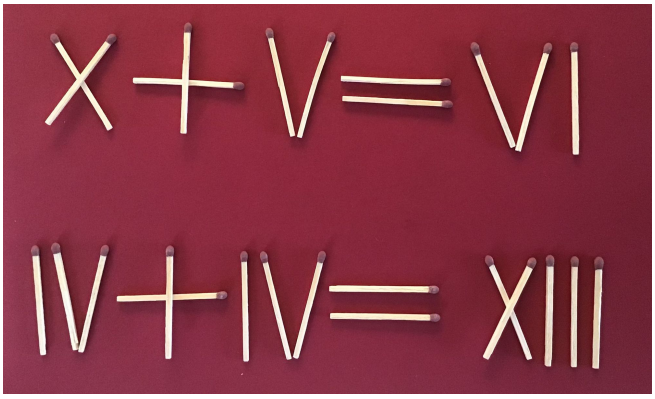
⑦ Beim Aufstellen der folgenden Zahlen wurden Fehler gemacht. Korrigiere die Fehler und erläutere, welche Regeln missachtet wurden.

a) LLX b) XM c) MDCXXXX d) IXC

a) Das Zwischenzeichen L (50) darf nicht zweimal hintereinander stehen. Stattdessen muss ein C (100) verwendet werden: CX (110).
b) Beim Subtrahieren darf nur das nächstkleinere Zahlzeichen aus C, X und I ausgewählt werden. Die Zahl 990 wird daher so geschrieben: CMXC.
c) In dieser Zahl steht das Zahlzeichen X öfter als dreimal hintereinander. Es muss eine Subtraktion genutzt werden: MDCXL (1.640).
d) Vor dem Zahlzeichen C stehen zwei unterschiedliche Zahlzeichen, die beide kleinere Werte haben. Werden beide subtrahiert, ist die Zahl 100 – 1 – 10 = 89. Die korrekte Schreibung wäre: LXXXIX.

⑧ Bei den Streichholzrätseln muss jeweils ein Streichholz umgelegt werden, damit eine wahre Aussage entsteht. Ermittle, welches Streichholz die Position wechseln muss.





Teilweise gibt es mehrere Lösungen. Eine Möglichkeit ist:
VI – II = IV
III – II = I
XI – V = VI
IX + IV = XIII

Lizenzhinweise: https://editor.mnweg.org/mnw/dokument/romische-zahlen-10

AB: Das Dualsystem

Mathematik Zahlen E 5

7L

① Rechne die Zahlen aus dem Dualsystem in das Dezimalsystem um. Nutze dazu die Stellenwerttafel.

a) 101_2 b) 1010_2 c) 1000_2 d) 100_2 e) 111_2
f) 1011_2 g) 10101_2 h) 111001_2 i) 101011_2 j) 1100011_2

	64	32	16	8	4	2	1	Zahl im Dezimalsystem
a)					1	0	1	4 + 1 = 5
b)				1	0	1	0	8 + 2 = 10
c)				1	0	0	0	8 = 8
d					1	0	0	4 = 4
e)					1	1	1	4 + 2 + 1 = 7
f)				1	0	1	1	8 + 2 + 1 = 11
g)			1	0	1	0	1	16 + 4 + 1 = 21
h)		1	1	1	0	0	1	32 + 16 + 8 + 1 = 57
i)		1	0	1	0	1	1	32 + 8 + 2 + 1 = 43
j)	1	1	0	0	0	1	1	64 + 32 +2 + 1 = 99

② Wie das Dezimalsystem kann das Dualsystem für größere Zahlen beliebig erweitert werden. Große Zahlen haben dann mehr Stellen.
Wandle die Zahl 1000110101_2 ins Dezimalsystem um. Berechne dafür zuerst die Werte der einzelnen Stellen.

512 + 32 + 16 + 4 + 1 = 563

CC BY SA

③ Gib die Zahlen von 1 bis 10 im Dualsystem an.

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010

④ Wandle die Zahlen mithilfe der Tabelle vom Dezimalsystem ins Dualsystem um.
a) 17 b) 23 c) 35 d) 85 e) 100

	Zahl als Summe	64	32	16	8	4	2	1	Zahl im Dualsystem
a)	17 = 16 + 1			1	0	0	0	1	10001_2
b)	23 = 16 + 4 + 2+ 1			1	0	1	1	1	10111_2
c)	35 = 32 + 2 + 1		1	0	0	0	1	1	100011_2
d	85 = 64 + 16 + 4 + 1	1	0	1	0	1	0	1	1010101_2
e)	100 = 64 + 32 + 4	1	1	0	0	1	0	0	1100100_2

⑤ Gib dein Geburtsdatum im Dualsystem an.

individuelle Lösung

Lizenzhinweise: https://editor.mnweg.org/mnw/dokument/das-dualsystem-4
CC BY SA

⑥ a) Bestimme die Zahlen 1, 3, 7, 15 und 31 im Dualsystem.
b) Beschreibe, welche Gemeinsamkeit die Zahlen im Dualsystem haben.
c) Erläutere, wie es zu dieser Gemeinsamkeit kommt.

a) 1_2, 11_2, 111_2, 1111_2 und 11111_2
b) Die Zahlen enthalten alle nur die Ziffer „1“.
c) Bei allen Zahlen handelt es sich um Zahlen aus der Stellenwerttafel, von denen „1“ subtrahiert wurde.

⑦ Gib den Vorgänger und den Nachfolger der Zahl im Dualsystem an.

1_2	10_2	11_2

101_2	110_2	111_2

111_2	1000_2	1001_2

10_2	11_2	100_2

1011_2	1100_2	1101_2

10010_2	10011_2	10100_2

⑧ Erläutere, wie sich bei einer Zahl im Dualsystem auf einen Blick erkennen lässt, ob sie gerade oder ungerade ist.

Alle geraden Zahlen haben an der Position ganz rechts eine „0“ stehen, alle ungeraden Zahlen haben dort eine „1“.

⑨ Die Zahl 1 hat im Dezimalsystem und im Dualsystem den gleichen Wert: $1 = 1_2$. Untersuche, ob es weitere Zahlen gibt, auf die das zutrifft.

Neben der 1 gilt das noch für die $0 = 0_2$. Ansonsten hat eine Zahl im Dualsystem immer mehr Stellen als im Dezimalsystem.

CC BY SA